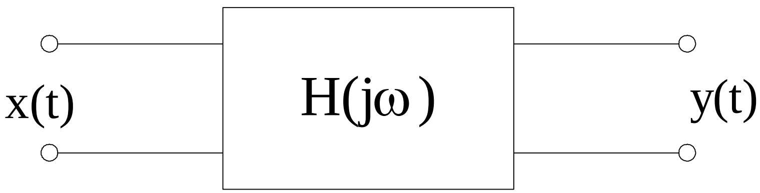
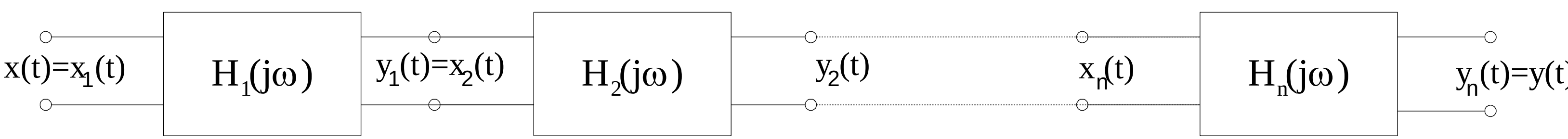
PRENOS SIGNALA KROZ LINEARNE SISTEME

Telekomunikacioni sistemi su sastavljeni od sklopova od kojih svaki pojedinačno predstavlja zasebnu funkcionalnu cjelinu.

Za svaki sklop mogu se odrediti dva kraja koja predstavljaju ulaz i dva kraja koja predstavljaju izlaz iz sklopa. Dakle, svaki sklop se može smatrati četvorokrajnikom, odnosno četvoropolom.



Niz ovakvih sklopova, čije su funkcije različite, a koji su vezani kaskadno, obrazuju ***sistem za prenos***:



Saglasno tome, kompletan sistem za prenos može da se ekvivalentira jednim četvoropolom.

Takav četvoropol, koji predstavlja sistem za prenos, karakteriše funkcija prenosa H(jω). Pri tome:

- Funkcija prenosa matematički modeluje promjene (amplitude i faze) koje nastaju pri prenosu signala kroz sistem.
- Linearna kola ***ne izazivaju*** promjene učestanosti.

Ako je signal na ulazu četvoropola *x*(t) i njegova Fourierova transformacija X(jω), onda je Fourierova transformacija signala *y*(t) na izlazu četvoropola:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

Kako je funkcija prenosa kompleksna veličina, može se napisati u obliku:

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\chi(\omega)}$$

A(ω) modeluje promjene amplitude ulaznog signala

χ(ω)modeluje promjene faze ulaznog signala

Ako ulazni i izlazni signal predstavimo u domenu učestanosti:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\theta_x(\omega)}$$

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)|e^{j\theta_y(\omega)}$$

dobija se:

$$|Y(j\omega)| = A(\omega)|X(j\omega)|$$

$$\theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \chi(\omega)$$

Dakle, očigledno je da se modulom A(ω) funkcije prenosa opisuju modifikacije ***spektralne gustine amplituda*** prenošenog signala, dok se argumentom χ(ω) funkcije prenosa opisuju promjene na nivou ***faznih stavova*** pojedinih komponenti prenošenog signala. Stoga se A(ω) naziva ***amplitudska***, a χ(ω) ***fazna karakteristika*** linearnog sistema.

Za kaskadnu vezu više četvoropola, funkcija prenosa cijelog sistema se odredjuje kao:

$$H(j\omega)=H_1(j\omega)H_2(j\omega)\cdot\ldots\cdot H_n(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}H_i(j\omega)$$

$$A(\omega)=A_1(\omega)A_2(\omega)\cdot\ldots\cdot A_n(\omega)=\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)$$

$$\chi(\omega)=\chi_1(\omega)+\chi_2(\omega)+\ldots+\chi_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\chi_i(\omega)$$

- Amplitudska karakteristika A(ω) cijelog sistema jednaka je ***proizvodu*** amplitudskih karakteristika pojedinih elemenata (sklopova)
- Fazna karakteristika χ(ω) cijelog sistema jednaka ***sumi*** faznih karakteristika pojedinih elemenata (sklopova)

IDEALNI SISTEMI PRENOSA

Idealni sistem prenosa – sistem u kome je izlazni signal y(t) identičan ulaznom signalu x(t).

Generalnije, pod idealnim sistemom podrazumijeva se onaj sistem čiji je odziv oblika:

$$y(t)=Ax(t-t_0)$$

Riječ je o sistemu koji unosi ***konstantno*** kašnjenje i modifikuje amplitudu u nekom ***konstantnom*** iznosu. Na taj način se postiže da preneseni signal ne bude izložen deformacijama koje bi dovele do toga da signal na izlazu takvog sistema (sklopa) ne bude identičan ulaznom signalu.

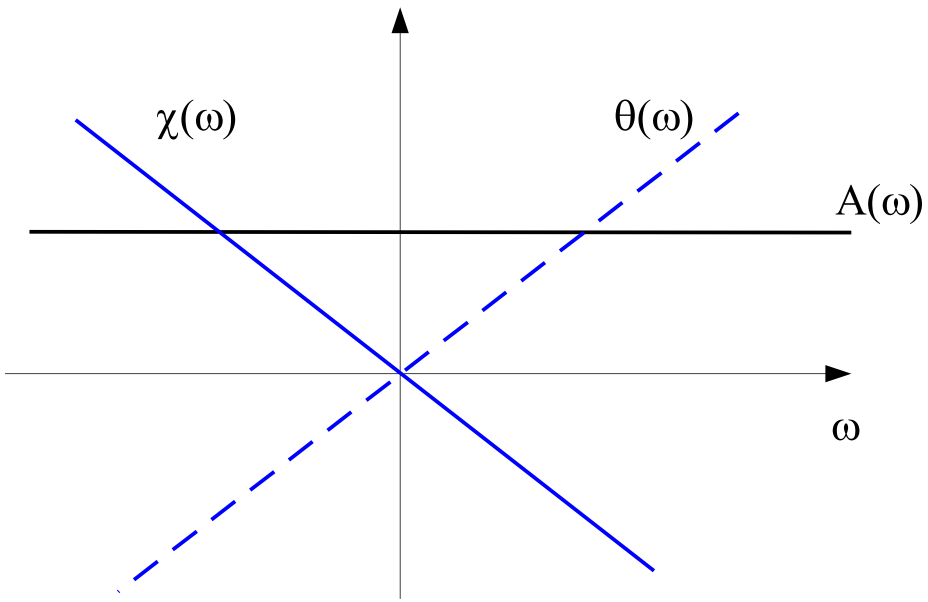
Polazeći od $y(t)=Ax(t-t_0)$, dobija se funkcija prenosa $H(j\omega)$ idealnog sistema za prenos:

$$Y(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} Ax(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=A\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(t_0+\tau)}d\tau$$

$$Y(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$Y(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}X(j\omega) \quad\Rightarrow\quad H(j\omega)=Ae^{-j\omega t_0}=A(\omega)e^{j\chi(\omega)}=A(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

$\theta(\omega)=-\chi(\omega)$ predstavlja karakteristiku ***faznog kašnjenja***.



Prenos će biti idealan kroz linearni sistem koji ima amplitudsku karakteristiku koja ne zavisi od učestanosti:

$$A(\omega)=A=\text{const.}$$

i faznu karakteristiku koja je linearna funkcija učestanosti:

$$\chi(\omega)=-\omega t_0$$

Navedeni uslov za idealan sistem prenosa može da se dodatno proširi, tako da se idealnim smatra sistem čija je funkcija prenosa oblika:

$$H(j\omega) = Ae^{-j(\omega t_0 \pm n\pi)}, \quad \mathrm{n-cio\ broj}$$

$$|H(j\omega)| = A = const.$$

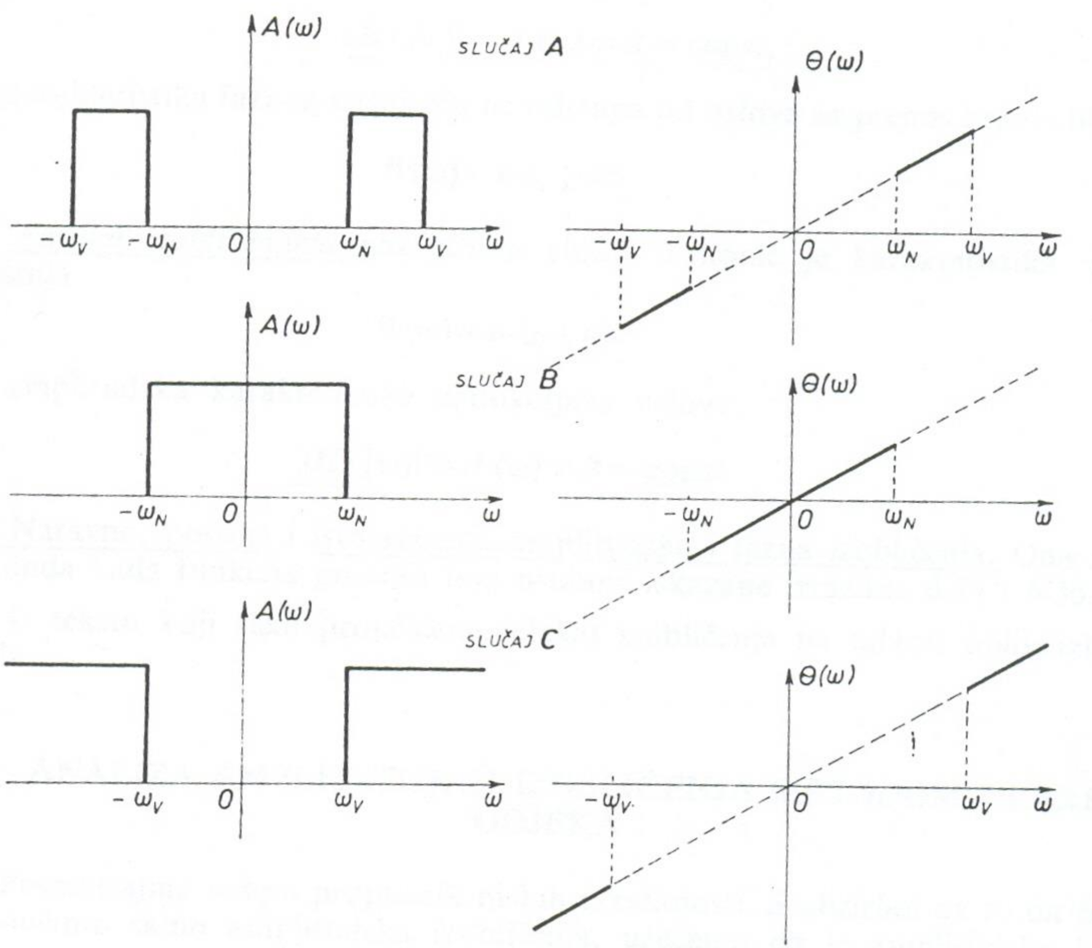
$$\theta(\omega) = \omega t_0 \pm n\pi$$

Pri tome, za A>1 sistem unosi ***pojačanje***, a za A<1 ***slabljenje***.

- Pri traženju uslova za idealan prenos nismo postavili nikakva ograničenja u pogledu širine spektra prenošenog signala *x*(t). U tom slučaju, za prenos signala bez izobličenja, izvedeni uslovi moraju biti zadovoljeni u ***cijelom opsegu učestanosti*** ($-\infty<\omega<\infty$).
- Medjutim, sistemi za prenos se realizuju kao sistemi ***ograničenog opsega*** učestanosti, tako da se govori o ***propusnom opsegu*** sistema za prenos ili ***širini kanala***.
- U takvim uslovima cijeli sistem se ponaša kao ***filtar***, tj. komponente signala određenih učestanosti koje se nalaze u njegovom propusnom opsegu propušta sa malim slabljenjem (ili ih u nekim slučajevima i pojačava), dok za ostale komponente van njegovog propusnog opsega unosi veliko slabljenje.

Idealan sistem za prenos u propusnom opsegu ima karakteristike idealnog sistema, dok sve komponente ulaznog signala van tog opsega beskonačno slabi. Sisteme za prenos dijelimo u tri grupe:

1. propusnike opsega učestanosti (opseg je od ω_N do ω_V)
2. propusnike niskih učestanosti (opseg je od $\omega_N=0$ do ω_V)
3. propusnike visokih učestanosti (opseg je od ω_N do $\omega_V \rightarrow \infty$)



Slika: Amplitudska karakteristika i karakteristika faznog kašnjenja idealnog sistema za prenos:
A - propusnik opsega;
B - propusnik niskih učestanosti; C - propusnik visokih učestanosti

Funkcija prenosa idealnog sistema za prenos (filtra) je:

$$H(j\omega)=\begin{cases} Ae^{-j(\omega t_0 \pm n\pi)} & \text{u propusnom opsegu} \\ 0 & \text{van propusnog opsega} \end{cases}$$

Prelaz sa propusnog na nepropusni opseg treba da bude ***trenutan*** (amplitudska karakteristika sa A na 0), pa se javlja problem praktične realizacije ovakvog sistema.

✓ **Zaključak:**

Linearni sistemi koji bi imali idealnu funkciju prenosa (kao na slikama) ***ne mogu se fizički realizovati***:

- Ne mogu se postići ***istovremeno oba uslova za idealan prenos***, pa se zbog toga javljaju izvjesna ***izobličenja*** signala.
- Iako se mogu samo teorijski analizirati, idealni sistemi prenosa imaju značaj za analizu realnih sistema. Ako se napravi sistem čija amplitudska karakteristika približno zadovoljava uslov idealnog prenosa, dodavanjem određenog sklopa može se korigovati fazna karakteristika da ukupno fazno kašnjenje sistema zadovolji uslov za prenos bez izobličenja (važi i obrnuto).

IZOBLIČENJA U PRENOSU SIGNALA

Pri prenosu signala telekomunikacionim sistemom (ili sklopom) može doći do izobličenja zbog:

- odstupanja funkcije prenosa sistema od idealne
- nepoklapanja opsega signala i propusnog opsega sistema
- kombinacije prethodna dva slučaja

Sistem koji ima idealnu funkciju prenosa i čiji se propusni opseg poklapa sa opsegom signala na ulazu nije moguće realizovati. Drugim riječima, fizički nije moguće postići istovremeno oba uslova za idealan prenos.

- Odstupanja od uslova idealnog prenosa uvijek dovode do pojave ***izobličenja*** u signalu koji se prenosi.

LINEARNA IZOBLIČENJA

Razlikuju se tri vrste linearnih izobličenja:

1. amplitudska izobličenja – nastaju u linearnim sistemima u kojima amplitudska karakteristika odstupa od idealne (tj. zavisna je od učestanosti), dok karakteristika faznog kašnjenja ne odstupa od uslova za prenos bez izobličenja:

$$|H(j\omega)| = A(\omega) \neq const, \quad \theta(\omega) = \omega t_0 \pm n\pi$$

2. fazna izobličenja - karakteristika faznog kašnjenja odstupa od idealne, dok amplitudska karakteristika zadovoljava uslov za prenos bez izobličenja:

$$|H(j\omega)| = A(\omega) = A = const, \; \theta(\omega) \neq \omega t_0 \pm n\pi$$

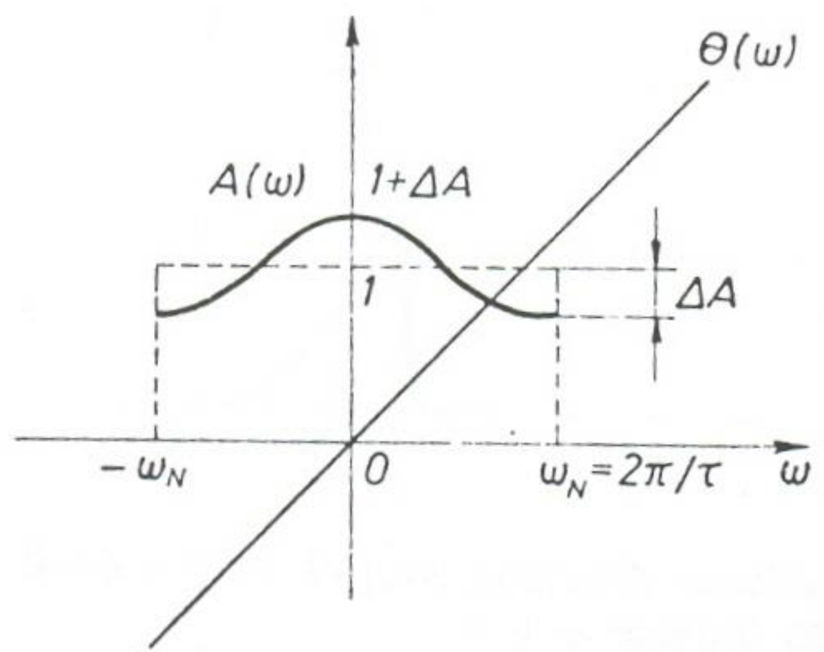
3. kombinovana izobličenja – i amplitudska karakteristika i karakteristika faznog kašnjenja odstupaju od idealne:

$$|H(j\omega)| = A(\omega) \neq const, \; \theta(\omega) \neq \omega t_0 \pm n\pi$$

ANALIZA AMPLITUDSKIH IZOBLIČENJA METODOM UPARENIH ODJEKA

Posmatrajmo sistem propusnik niskih učestanosti.

-Kako bi proučili uticaj samo ***amplitudskih*** izobličenja, neka amplitudska karakteristika odstupa od idealne, tj. zavisi od učestanosti, a karakteristika faznog kašnjenja je linearna, tj:



$$A(\omega) = \begin{cases} 1 + \Delta A \cos\frac{\tau}{2}\omega & \text{za } |\omega| < \frac{2\pi}{\tau} = \omega_N \\ 0 & \text{za } |\omega| > \frac{2\pi}{\tau} = \omega_N \end{cases}$$

$$\theta(\omega) = \omega t_0$$

- Amplitudska karakterisitika je uvijek ***parna funkcija*** učestanosti.

Pretpostavimo da ulazni signal ima ograničen spektar u opsegu učestanosti od $\omega=0$ do $\omega=\omega_N$ (poklapa se sa propusnim opsegom sistema). Tada će izobličenja izlaznog signala biti isključivo uzrokovana neidealnošću amplitudske karakteristike.

U tim uslovima, kompleksni spektar izlaznog signala je:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\left(1+\Delta A\cos\frac{\tau}{2}\omega\right)e^{-j\omega t_0}X(j\omega)=$$

$$Y(j\omega)=X(j\omega)\left(e^{-j\omega t_0}+\frac{\Delta A}{2}e^{-j\omega\left(t_0-\frac{\tau}{2}\right)}+\frac{\Delta A}{2}e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}\right)$$

pa se dobija izlazni signal y(t):

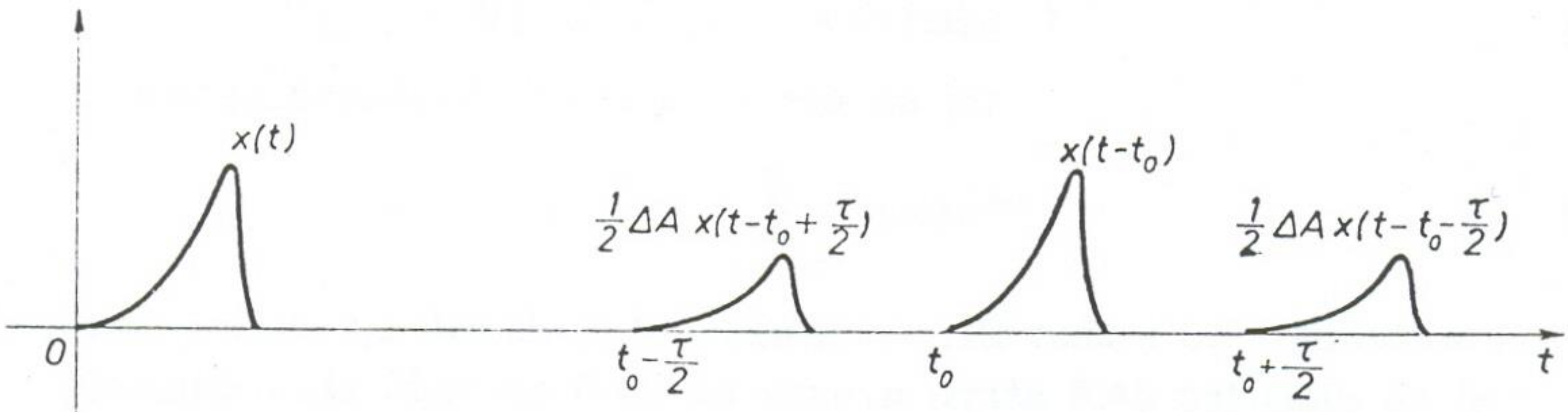
$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=x(t-t_0)+\frac{1}{2}\Delta Ax\left(t-t_0+\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{2}\Delta Ax\left(t-t_0-\frac{\tau}{2}\right)$$

Očigledno je da se izraz za izlazni signal sastoji iz tri člana:

1. poslati signal koji u vremenu kasni za t_0

2. drugi i treći član predstavljaju nove signale koji su se pojavili na izlazu iz sistema zbog amplitudskog izobličenja. Njihov talasni oblik je sličan originalnom, samo je amplituda pomnožena koeficijentom (1/2)ΔA, a fazno su pomjereni za t_0-τ/2 i t_0+τ/2. Javljaju se u paru, lijevo i desno oko prenošenog signala $x(t-t_0)$, pa se nazivaju ***upareni odjeci***.



Slika: Pojava uparenih odjeka nastalih uslijed amplitudskih izobličenja prenošenog signala x(t) u sistemu sa navedenom funkcijom prenosa

U prethodnoj analizi je pretpostavljen jedan specifičan oblik amplitudske karakteristike $A(\omega)$:

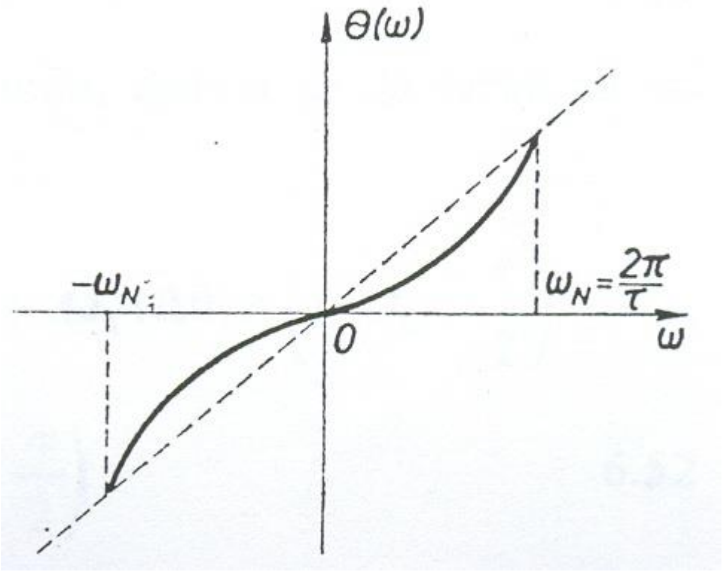
$$A(\omega)=\begin{cases} 1+\Delta A\cos\frac{\tau}{2}\omega & \text{za } |\omega|<\frac{2\pi}{\tau}=\omega_N \\ 0 & \text{za } |\omega|>\frac{2\pi}{\tau}=\omega_N \end{cases}$$

$$\theta(\omega)=\omega t_0$$

Kako je amplitudska karakteristika ***parna*** funkcija, bilo koji drugačiji oblik zavisnosti A od učestanosti može da se razvije u Fourrierov red u kome će se javiti ***kosinusni*** članovi. Kako je riječ o linearnim sistemima, važiće princip superpozicije, tj. svaki kosinusni član iz razvoja amplitudske karakteristike u red će izazvati pojavu po dva uparena odjeka lijevo i desno od signala $x(t-t_0)$.

ANALIZA FAZNIH IZOBLIČENJA METODOM UPARENIH ODJEKA

Posmatrajmo sistem propusnik niskih učestanosti čija amplitudska karakteristika ne zavisi od učestanosti, a karakteristika faznog kašnjenja nije linearna (kao na slici).



Pošto je θ(ω) uvijek neparna funkcija od ω, pretpostavićemo faznu karakteristiku sledećeg oblika::

$$\theta(\omega) = \omega t_0 - \Delta\theta \sin\frac{\tau}{2}\omega$$

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = A = const. \quad \text{za } |\omega| < \omega_N$$

Uz pretpostavku da se spektar ulaznog signala poklapa sa širinom propusnog opsega sistema (što znači da izobličenja nastaju samo usled nelinearnosti fazne karakteristike), spektar izlaznog signala će biti:

$$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=AX(j\omega)e^{-j\left(\omega t_0-\Delta\theta\sin\frac{\tau}{2}\omega\right)}$$

Iz teorije Besselovih funkcija važi:

$$e^{jm\sin x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(m)e^{jnx} \qquad \text{i} \qquad J_{-n}(m)=(-1)^n J_n(m)$$

gdje je $J_n(m)$ Besselova funkcija prve vrste reda *n* od argumenta *m*.

$$Y(j\omega)=AX(j\omega)e^{-j\omega t_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\Delta\theta)e^{jn\frac{\tau}{2}\omega}$$

Za mali argument *m*<<1 Besselova funkcija se može zapisati u obliku:

$$J_n(m)\approx\frac{m^m}{2^n n!}$$

Konačno se dobija, uz pretpostavku da je Δθ<<1, da je spektar izlaznog signala:

$$Y(j\omega) \approx AX(j\omega)e^{-j\omega t_0}\left(J_0(\Delta\theta) + J_1(\Delta\theta)e^{j\frac{\tau}{2}\omega} - J_1(\Delta\theta)e^{-j\frac{\tau}{2}\omega} \right)$$

$$Y(j\omega) \approx AJ_0(\Delta\theta)X(j\omega)e^{-j\omega t_0} + AJ_1(\Delta\theta)X(j\omega)e^{-j\omega\left(t_0-\frac{\tau}{2}\right)} - AJ_1(\Delta\theta)X(j\omega)e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}$$

Inverznom Fourrierovom transformacijom se dolazi do izlaznog signala *y*(t):

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

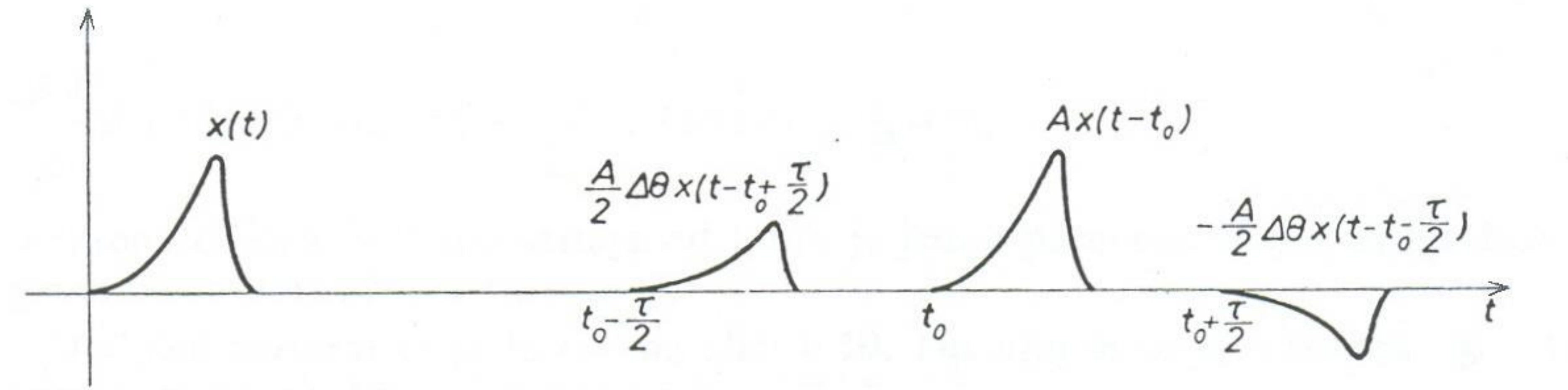
$$y(t) = AJ_0(\Delta\theta)x(t-t_0) + AJ_1(\Delta\theta)x\left(t - t_0 + \frac{\tau}{2}\right) - AJ_1(\Delta\theta)x\left(t - t_0 - \frac{\tau}{2}\right)$$

Koristeći aproksimacije za malo Δθ:

$$J_0(\Delta\theta) \approx 1, \qquad J_1(\Delta\theta) \approx \frac{1}{2}\Delta\theta$$

$$y(t) = Ax(t - t_0) + \frac{A}{2}\Delta\theta \cdot x\left(t - t_0 + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{A}{2}\Delta\theta \cdot x\left(t - t_0 - \frac{\tau}{2}\right)$$

Uz učinjene pretpostavke dobija se odziv koji ima tri komponente:
1. komponenta $x(t-t_0)$ koja bi postojala u slučaju idealnog sistema prenosa
2. dva člana – ***upareni odjeci***, lijevo i desno od glavne komponente, pri čemu desni odjek ima fazni pomeraj od π.



Slika: Pojava uparenih odjeka nastalih usled faznih izobličenja prenošenog signala x(t) u sistemu za pretpostavljenu funkciju prenosa

Ovaj slučaj se može generalizovati i za bilo koju proizvoljnu funkciju faznog kašnjenja. Kako je ona uvijek ***neparna***, može da se razvije u Fourrierov red koji sadrži samo ***sinusne*** članove, i svaki od njih će dati par odjeka. Njihovom superpozicijom se dobija talasni oblik izobličenog izlaznog signala $y(t)$.